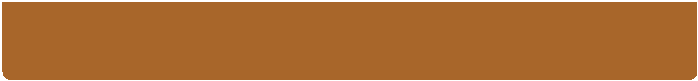
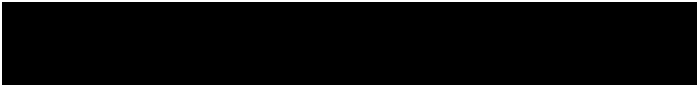
Evaluation Warning: The document was created with Spire.Doc for JAVA.

Đại số tuyến tính

1/70

Chương3.Khônggianvectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

2/70

3.5. Hạng của một hệ vectơ

3.4. Cơ sở - Số chiều - Tọađộ

3.3. Độc lập tuyếntính và phụ thuộc tuyếntính

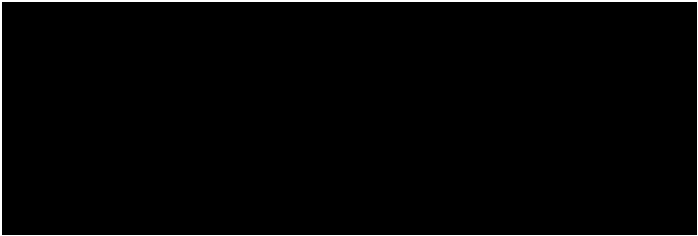
3.2. Không gian vectơ con

3.1. Định nghĩa và các tính chất

Chương 3. Không gian vectơ

NỘI DUNG

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

3/70

2

n

i

={(a

,a

,...,a

)|a

∈A,∀i =1,n}

1

A

n

như sau:

n lần

|

{z

}

Tích DescartesA×A×...×A

viết gọn là An được định nghĩa

và (a

,a

1

2

,...,a

n

)=(b

,b

1

2

,...,b

n

)⇔a

i

=b

,∀i =1,n.

i

1

2

n

2

n

i

∈A

,∀i =1,n},

i

={(a

,a

,...,a

)|a

1

Vậy,A

×A

×...×A

1

2

n

n

1

2

n

∈A

, ...,a

∈A

. Kí hiệu là A

×A

×...×A

.

2

∈A

, a

1

a

tất cả các bộ có thứ tự n phần tử (a

,a

1

2

,...,a

n

) sao cho

Tích Descartes(Đề các) của n tập hợp A

,A

1

2

,...,A

n

là tập hợp

3.1.1 Định nghĩa tích Descartes:

3.1. Định nghĩa và các tính chất

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

4/70

thêm.)

(K là trường số. Từ đâyvề sau ta luôn hiểu K=R nếu không nói gì

(λ,x)→λx

·: K×V →V

Phép nhân ngoài ·

(x,y)→x +y

+: V ×V →V

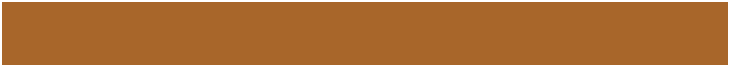
Phép cộng +

rỗng. Trêntập V ta xây dựng 2 phép toán sau:

3.1.2 Định nghĩa không gian vectơ: Cho V là một tập hợp khác

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

5/70

V, phần tử −x được gọi là phần tử đối của x.

V

gọi một vô hướng. Phần tử O

ở trên được gọi là phần tử không của

vectơ. Mỗi phần tử x ∈V được gọi là một vectơ, mỗi α∈R được

thì V được gọi là không gian vectơ trên K haymột K- không gian

1x =x, ∀x ∈V

8

(αβ)x =α(βx), ∀x ∈V,∀α,β ∈K

7

(α+β)x =αx +βx, ∀x ∈V,∀α,β ∈K

6

α(x +y)=αx +αy, ∀x,y ∈V,∀α∈K

5

V

∀x ∈V, ∃−x ∈V :x +(−x)=(−x)+x =O

,

4

V

V

V

∃O

∈V :x +O

=O

+x =x, ∀x ∈V

3

x +(y +z)=(x +y)+z, ∀x,y,z ∈V

2

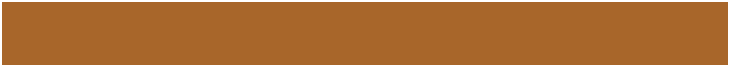
x +y =y +x, ∀x,y ∈V

1

Nếu (V,+,·) thỏa mãn 8 tiên đề sau:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

6/70

P(x)=0 và phần tử đối của đa thức P(x) là đa thức −P(x).

một không gian vectortrên R với phần tử không là đa thức

cộng hai đa thức và phép nhân một số thực với một đa thức là

TậpK[x] các đa thức một biến với các hệ số trên R với phép

ma trận đối.

m×n

gian vectơ trên K với phần tử không là O

và phần tử đối là

trận và phép nhân một số thực với một ma trận là một không

m×n

TậpM

(R) các ma trận cỡ m×n cùng với phép cộng hai ma

vectơ không

0 và phần tử đối của

OA∈V là vectơ đối −

OA.

⃗

−→

−→

vectơ là một không gian vectơ trên K với phần tử không là

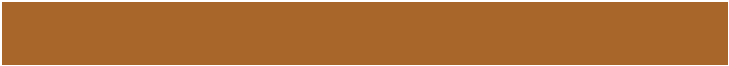
với phép cộng hai vectơ và phép nhân một số thực với một

TậpV các vectơ hình học chung gốc O trong không gian cùng

3.1.3 Các ví dụ:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

7/70

x =(x

,x

1

2

,...,x

n

)∈Rn là −x =(−x

1

,−x

,...,−x

2

n

)∈Rn.

n lần

|

{z

}

trên R với phần tử O =(0,0,...,0)

và phần tử đối của

TậpRn cùng với hai phép toán trên là một không gian vectơ

1

2

n

Phép nhân với một vô hướng: αx =(αx

,αx

,...,αx

)

1

1

2

2

n

n

Phép cộng hai phần tử: x +y =(x

+y

,x

+y

,...,x

+y

)

nhân với một vô hướng α∈R như sau:

x =(x

,x

1

2

,...,x

n

)∈Rn,y =(y

1

,y

,...,y

2

n

)∈Rn và phép

TrênRn ta định nghĩa phép toán cộng hai phần tử

2

n

i

(x

,x

,...,x

):x

∈R,i =1,n

1

=

n

n lần

o

|

{z

}

TậpRn =R×R×...×R

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

8/70

Khi đó C[a,b] là một không gian vectơ trên R.

(αf)(x)=αf(x).

αf ∈C[a,b] được định nghĩa bởi

và tích của một số α∈R với hàm số f ∈C[a,b] là hàm số

(f +g)(x)=f(x)+g(x)

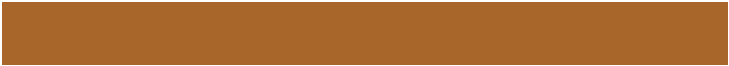
f +g ∈C[a,b] được định nghĩa bởi

[a,b]. Tổngcủa hai hàm số f,g ∈C[a,b] là hàm số

Xét C[a,b] là tập hợp tất cả các hàm số thực liên tục trên

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

9/70

x ∈Q,α∈R thì nói chung αx ∈/ Q.

vectơ trên Q. Tuynhiên Q không là không gian vectơ trên R vì

tính chất quen thuộc của số thực. Vì vậyR là một không gian

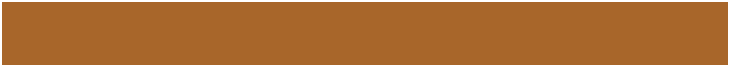
tiên đề trong định nghĩa của một không gian vectơ chính là các

số thực là một số thực và nếu x ∈R,α∈Q thì αx ∈R . Tám

Xét tập số thực R và tập số hữu tỷQ. Đối với R, tổng của hai

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

10/70

Nếu x+y =z thì x =z−y, ∀x,y,z ∈V (Quy tắc chuyểnvế).

8

Nếu x +z =y +z thì x =y,∀x,y,z ∈V (Luật giản ước).

7

∀x ∈E :(−1)x =−x.

6

V

V

∀x ∈E,α∈R:αx =O

khi và chỉ khi α=0 hoặc x =O

.

5

V

V

∀α∈R:αO

=O

.

4

V

∀x ∈E :0x =O

.

3

Vớimỗi x ∈V, tồn tại duy nhất phần tử đối của nó.

2

V

V

∀x ∈V : x +O

=O

+x =x.

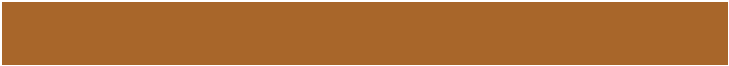
Tính duy nhất của phần tử không

1

3.1.4 Các tính chất: Cho V là một không gian vectơ trên K.

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

11/70

∀x ∈W,∀α∈K:αx ∈W.

2

∀x,y ∈W :x +y ∈W.

1

mãn:

không gian con của V nếu và chỉ nếu các điều kiện sau được thỏa

Định lý 1: Tậpcon W khác rỗng của không gian vectơ V trên K là

3.2.2 Các định lý:

gian vectơ con của V (gọi gọn là không gian con của V).

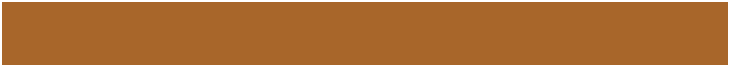
nếu W là một tập con khác rỗng của V thì W được gọi là không

3.2.1 Định nghĩa: Nếu V và W đều là không gian vectơ trên K và

3.2. Không gian vectơ con

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

12/70

vectorcon của V.

V

Từ đó, nếu O

∈W thì W không phải là một không gian

nên điều kiện 2 được thỏa mãn).

V

O

=0·x ∈W (bởi vì W là một không gian vectơ con của V

W =∅. Do đó, tồn tại x ∈W ⊂V. Từ đó, với 0∈K, ta có:

Thật vậy,do W là một không gian vectơ con của V nên

V

Nếu W là một không gian vectơ con của V trên K thì O

∈W.

không gian con nàyđược gọi là các không gian con tầm thường.

V

thântậpV vàtập{O

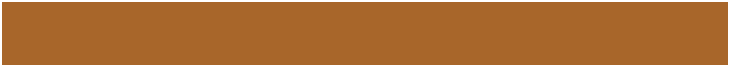
}gồmchỉmộtphầntửkhôngcủaV .Các

Bất kì không gian vectơ V đều có hai không gian con là bản

Nhận xét:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

13/70

0 b

0 b

W =

:a,b ∈R

U =

:a,b ∈R

a 0

a 1

n

o

n

o









2×2

M

(R)?

Ví dụ 2: Hỏi tập nào sau đâylà không gian vectơ con trên R của

một không gian vectơ con trên R của R3.

2

1

2

3

,x

):x

+x

+x

=0

là

3

(x

,x

1

Ví dụ 1: Chứng minh rằng W =





mọi α,β ∈K ta có: αx +βy ∈W.

không gian con của V trên K khi và chỉ khi với mọi x,y ∈W , với

Định lý 2: TậpW khác rỗng của không gian vectơ V trên K là

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

14/70

của hai không gian con W

,W

1

2

và được kí hiệu là W

1

+W

2

.

Khi đó W là một không gian con của V trên K và được gọi là tổng

1

1

2

∈W

}.

2

∈W

,x

1

+x

|x

2

W ={x

vectơ V trên K. Tađịnh nghĩa

Định lý 4: Giả sử W

,W

1

2

là hai không gian con của không gian

gian con của V.

i=1

i

một không gian vectơ V trên K. Khi đó W =∩m

W

là một không

Định lý 3: Giả sử W

,W

1

2

,...,W

m

là những không gian con của

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

15/70

biểu thị tuyếntính được qua các vectơ x

,x

1

2

,...,x

m

.

Nếu w là một tổ hợp tuyếntính của các vectơ x

,...,x

1

m

thì ta nói w

1

1

m

m

w =α

x

+···+α

x

.

1

m

1

m

x

,...,x

trong V nếu tồn tại α

,...,α

∈K sao cho

Vectơw ∈V được gọi là một tổ hợp tuyếntính của các vectơ

3.3.1 Tổhợp tuyếntính: Cho V là một không gian vectơ trên K.

3.3. Độc lập tuyếntính và phụ thuộc tuyếntính

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

16/70

1

2

3

=1·x

+1·x

+(−1)·x

1

2

3

O

=(0,0)=0·x

+0·x

+0·x

R2

Tacó

1

2

3

{x

=(1,1);x

=(2,0);x

=(3,1)}.

Ví dụ 2: TrongR2 xét hệ 3 vectơ sau:

1

2

Vậyw biểu thị tuyếntính qua x

và x

.

1

2

w =(2,−1)=2x

+(−5)x

.

1

2

Ví dụ 1: TrongR2 cho x

=(1,2) và x

=(0,1). Khi đó

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

17/70

2

3

1

2

các vectơ x

,x

trong R3 với x

=(2,4,7); x

=(3,2,5);

=(5,6,a).

,x

1

x

3

Ví dụ 3: Tìm a để vectơ x =(1,3,5) biểu thị tuyếntính được qua

chung không phải là duy nhất.

Cách biểu thị tuyếntính của một vectơ qua một hệ vectơ nói

Cách biểu diễn nàyđược gọi là cách biểu diễn tầm thường.

V

1

2

n

O

=0·x

+0·x

+...+0·x

với cách biểu thị là

V

n

luôn được biểu thị tuyếntính qua hệ {x

,...,x

}

1

Phần tử O

Nhận xét:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

18/70

có vô số nghiệm thì hệ vectơ {x

,x

1

2

,...,x

m

} phụ thuộc tuyếntính.

vectơ {x

,x

1

2

,...,x

m

} độc lập tuyếntính, còn nếu phương trình này

α

,α

1

2

,...,α

m

. Nếu phương trình nàycó nghiệm duy nhất thì hệ

1

1

m

m

V

Chú ý: Xét phương trình vectơ α

x

+···+α

x

=O

theo các ẩn

1

1

m

m

V

1

2

m

α

x

+···+α

x

=O

kéotheo α

=α

=...=α

=0.

không phụ thuộc tuyếntính, nghĩa là từ đẳng thức

Hệ vectơ {x

,x

1

2

,...,x

m

} được gọi là độc lập tuyếntính nếu nó

1

1

m

m

V

α

x

+···+α

x

=O

.

1

m

,α

,...,α

∈K không đồng thời bằng 0 sao cho

2

tồn tại α

Hệ vectơ {x

,x

1

2

,...,x

m

} được gọi là phụ thuộc tuyếntính nếu

1

m

,x

,...,x

của không gian vectơ V trên K, m≥1.

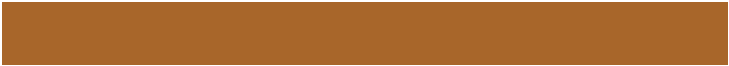
2

x

3.3.2 Phụ thuộc tuyếntính và độc lập tuyếntính: Cho m vectơ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

19/70

Chứng minh rằng hệ bốn vectơ nàyđộc lập tuyếntính.

1 1

1 1

0 1

1 0

A=

, B =

, C =

, D =

1 0

0 1

1 1

1 1

















Ví dụ 6 TrongM

(R) cho hệ 4 vectơ

A,B,C,D

với

2





phụ thuộc tuyếntính?

2

3

e

=(1,1,4); e

=(1,−1,−1). Hỏi hệ (e) độc lập tuyếntính hay

1

3

1

,e

,e

với e

=(2,0,3);

2

Ví dụ 5 TrongR3 cho hệ (e )=

e





thuộc tuyếntính?

2

3

e

=(0,1,1); e

=(1,1,−1). Hỏi hệ (e) độc lập tuyếntính hayphụ

1

3

1

,e

,e

với e

=(1,2,3);

2

Ví dụ 4 TrongR3 cho hệ (e )=

e





Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

20/70

một vectơ biểu thị tuyếntính qua các vectơ còn lại.

Điều kiện cần và đủ để một hệ vectơ phụ thuộc tuyếntính là có

4

V

Mọi hệ vectơ chứa O

là một hệ phụ thuộc tuyếntính.

3

tuyếntính.

một hệ vectơ phụ thuộc tuyếntính thì hệ mới cũng phụ thuộc

Từ tính chất nàysuy ra nếu thêm vào một hoặc nhiều vectơ của

tuyếntính.

Mọi hệ con của một hệ độc lập tuyếntính là một hệ độc lập

2

tuyếntính.

V

Trongkhông gian vectơ, mỗi vectơ khác O

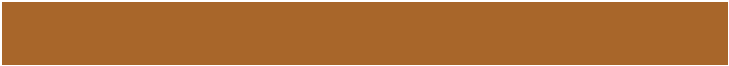
là một hệ độc lập

1

3.3.3 Các tính chất của hệ độc lập và phụ thuộc tuyếntính:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

21/70

Bốn vectơ bất kỳ lập thành một hệ phụ thuộc tuyếntính.

không đồng phẳng.

chúng đồng phẳng; độc lập tuyếntính khi và chỉ khi chúng

Ba vectơ lập thành một hệ phụ thuộc tuyếntính khi và chỉ khi

không cùng phương.

chúng cùng phương; độc lập tuyếntính khi và chỉ khi chúng

Hai vectơ lập thành một hệ phụ thuộc tuyếntính khi và chỉ khi

Ví dụ 7 Trongkhông gian vectơ hình học V.

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

22/70

Vớigiá trị nào của a thì hệ U ={p

,p

1

2

,p

} độc lập tuyếntính?

3

3

:=p

(x)=x

−ax −3

3

p

2

2

:=p

(x)=x

+x +1

2

p

2

1

:=p

(x)=x

−1

1

p

2

nhỏ hơn hoặc bằng 2 và

2

Ví dụ 8: Cho P

là không gian các đa thức với hệ số thực có bậc

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

23/70

Span{x

,x

1

2

,...,x

m

} hoặc <x

,x

1

2

,...,x

m

>.

Kí hiệu không gian con sinh bởi hệ vectơ {x

,x

1

2

,...,x

m

} là

của W.

hệ vectơ {x

,x

1

2

,...,x

m

}, còn hệ {x

,x

1

2

,...,x

m

} được gọi là hệ sinh

là một không gian con của V và được gọi là không gian con sinh bởi

1

1

m

m

i

W ={α

x

+···+α

x

|α

∈K,i =1,m}.

V trên K. Tậphợp

a. Định lý: Cho hệ gồm m vectơ x

,x

1

2

,...,x

m

của không gian vectơ

3.4.1 Không gian con sinh bởi một hệ vectơ:

3.4. Cơ sở - Số chiều - Tọađộ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

24/70

1

2

3

α

+α

+α

=0





1

2

3

⇔

α

+3α

+5α

=0

(2)



1

2

3



α

+2α

+3α

=0



Khi đó (1) ⇔α

(1,1,1)+α

1

2

(2,3,1)+α

(3,5,1)=(0,0,0)

3

1

1

2

2

3

3

α

v

+α

v

+α

v

=O

(1)

R3

Giải: Xét phương trình vectơ

Span(T)= Span(S).

và hãy chỉ ra tập con T ⊂S sao cho T chỉ có hai vectơ nhưng

con của không gian vectơ R3. Chứng tỏ rằng S phụ thuộc tuyếntính

1

2

3

Ví dụ: Cho S =

v

=(1,1,1);v

=(2,3,1);v

=(3,5,1)

là tập





Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

25/70

Span(S) ⊂ Span(T).

Để chứng minh điều này,ta chứng minh Span(T) ⊂ Span(S ) và

Xét hệ T ={v

,v

1

2

}. Tachứng minh Span(T) = Span(S).

1

2

3

3

2

1

v

−2v

+v

=O

⇔v

=2v

−v

.

R3

3

1

2

Lấyα

=1, ta có α

=1 ,α

=−2. Thayvào (1), ta được

2

3

2

3

α

+2α

=0

α

=−2α

Hệ pt (2) ⇔

⇔

1

2

3

1

3

α

+2α

+3α

=0

α

=α

(

(

Vậyhệ S phụ thuộc tuyếntính.

1

3

,α

,α

không đồng thời bằng 0.

2

(1) đúng ngaycả khi các α

Từ đó, r(A)=2<3 nên (2) có nghiệm không tầm thường. Do đó,

1 1 1

0 −1 −2

0 0 0

A=

1 3 5

0

1

2

−→

0 1 2





i



3

3

2





→h

−h

,i=1

 h

→h

−h

−→

i

1

h

1 2 3

1

2

3

1 2 3













Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

26/70

Từ đó, v ∈ Span(S).

1

1

2

2

+2γ

)v

3

−γ

)v

+(γ

3

=(γ

1

1

2

2

2

1

+γ

(2v

−v

)

3

v =γ

v

+γ

v

1

1

2

2

3

3

3

2

1

v =γ

v

+γ

v

+γ

v

. Thayv

=2v

−v

vào, ta được

1

3

,γ

,γ

∈R sao cho

2

+ Lấyv ∈ Span(T). Khi đó ∃γ

Từ đó, v ∈ Span(S).

1

1

2

2

1

1

2

2

3

v =β

v

+β

v

=β

v

+β

v

+0β

1

2

+ Lấyv ∈ Span(T). Khi đó ∃β

,β

∈R sao cho

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

27/70

R3.

1

3

;e

;e

là một hệ sinh của không gian vectơ

2

Do đó, hệ vectơ

e





x =x

(1,0,0)+x

1

2

(0,1,0)+x

(0,0,1)=x

3

1

e

1

+x

2

e

2

+x

3

e

3

.

Giải: ∀x =(x

,x

1

2

,x

3

)∈R3, ta có

một hệ sinh của không gian vectơ R3.

1

2

3

Ví dụ 1: Hệ vectơ

e

=(1,0,0);e

=(0,1,0);e

=(0,0,1)

là





K-không gian vectơ hữu hạn sinh.

Nếu V có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử thì V được gọi là

sinh của V nếu mọi vectơ của V đều biểu thị tuyếntính qua hệ đó.

một K-không gian vectơ. Một hệ vectơ trong V được gọi là một hệ

b. Định nghĩa (hệ sinh của một không gian vectơ): Giả sử V là

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

28/70

3

3

0 1 1

x

0

1

1

x







2



2

1

A=

1 0 1

x

−→

0 −1 1

x

−x

¯











2

2

1

 h

→h

−h



1



1

1 1 0

x

1

1

0

x

















2

3

3

α

+α

=x





1

3

2

⇔

α

+α

=x

(3)

2

1

=x

∈R,(x

,x

1

2

(1,1,0)+α

(1,0,1)+α

2

,x

)=α

3

1





α

+α

1



3

(0,1,1)

1

1

2

2

3

3

∈R,x =α

f

+α

f

+α

f

3

⇔ ∀x =(x

,x

,x

)∈R3, x biểu thị tuyếntính qua (f)

1

2

⇔∃α

,α

,α

1

2

3

⇔∃α

,α

,α

1

2

3

Giải: Hệ vectơ (f) là một hệ sinh của không gian vectơ R3

2

3

f

=(1,0,1);f

=(0,1,1)

là một hệ sinh của không gian vectơ R3.



1

Ví dụ 2: Chứng minh rằng hệ vectơ

f

=(1,1,0);



Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

29/70

một hệ sinh của R3.

nghiệm duy nhất với mỗi x =(x

,x

1

2

,x

3

)∈R3 cho trước.Vậy(f) là

bằng với số pt nên hệ pt (3) là hệ pt Cramer. Do đó hệ pt (3) có

0 1 1









Cách khác: Vì det(A )=

1 0 1

=−2=0 và hệ pt (3) có số ẩn









1 1 0









mỗi x ∈R3 cho trước. Vậy(f) là một hệ sinh của R3.

Nhận thấyr(A)= r(

A) =3 nên hệ pt (3) có nghiệm duy nhất với

¯

3

2

1

0

0

2

x

+x

−x





2

1

−→

0 −1 1

x

−x







3

3

2

h

→h

+h



1

1

1

0

x









Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

30/70

1

2

+βb

,0,0)

2

+βb

,αa

1

=(αa

αa+βb =α·(a

,a

1

2

,0,0)+β·(b

,b

1

2

,0,0)

Giả sử a=(a

,a

1

2

,0,0),b =(b

,b

1

2

,0,0). Khi đó ∀α,β ∈R, ta có:

a. Vì O

∈W nên W =∅. Lấytùy ý a,b ∈W.

R4

Giải:

hai hệ {e

,e

1

2

} và {e

,e

1

2

,δ} đều là hệ sinh của W.

1

2

gian con W′ sinh bởi hệ {e

,e

,δ}. Chứng tỏ rằng W =W′, tức là

c. Thêm vectơ δ =(2,3,0,0) vào hệ vectơ {e

,e

1

2

}. Xét không

2

e

=(0,1,0,0) là một hệ sinh của W.

b. Chứng minh rằng hệ hai vectơ {e

,e

1

2

} với e

1

=(1,0,0,0) và

a. Chứng minh rằng W là một không gian con của R4.

Vídụ3:XéttậpW ={(a

,a

1

2

,0,0):a

i

∈R}trongkhônggianR4.

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

31/70

{e

,e

1

2

} là một hệ sinh của W.

Do đó, mọi x ∈W đều biểu thị tuyếntính qua {e

,e

1

2

} . Vậy

1

1

2

1

=x

e

+x

e

x =x

(1,0,0,0)+x

1

2

(0,1,0,0)

b. ∀x =(x

,x

1

2

,0,0)∈W thì

2

2

αa

+βb

∈R và αa+βb ∈W. VậyW là không gian con của R4.

Do a,b ∈W nên a

,a

1

2

,b

,b

1

2

∈R. Từ đó, αa

1

+βb

1

∈R,

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

32/70

Từ đó, x ∈W.

1

1

2

2

+3γ

)v

3

+2γ

)v

+(γ

3

=(γ

1

1

2

2

1

2

+γ

(2e

+3e

)

3

x =γ

e

+γ

e

1

2

Vì δ =(2,3,0,0)=2e

+3e

nên

1

3

1

1

2

2

3

3

,γ

,γ

∈R: v =γ

e

+γ

e

+γ

e

.

2

+ Lấyx ∈W′. Khi đó ∃γ

Từ đó, x ∈W′.

1

1

2

2

1

1

2

2

x =β

e

+β

e

=β

e

+β

e

+0·δ

1

2

+ Lấyx ∈W . Khi đó ∃β

,β

∈R:

1

1

,e

}=W.

2

,e

,δ}= Span{e

2

c. Tasẽ chứng minh W′ = Span{e

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

33/70

Trảlời: Khái niệm độc lập tuyếntính.

một số tối thiểu vectơ sinh ra không gian ấykhông?

Câu hỏi Trongmột hệ sinh của một không gian vectơ có thể có

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

34/70

n thành phần

1

2

n

=(1,0,0,...,0)

;e

=(0,1,0,...0);...;e

=(0,0,0,...,1)

.

|

{z

}

e





Tổngquát: Cơ sở chính tắc của không gian vectơ Rn là hệ n vectơ

là một cơ sở, người ta gọi đó là cơ sở chính tắc của R3.

1

2

3

e

=(1,0,0);e

=(0,1,0);e

=(0,0,1)





Ví dụ 1: Trongkhông gian R3, hệ ba vectơ

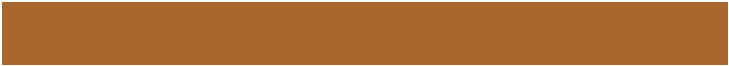
vectơ V được gọi là một cơ sở của V.

a. Định nghĩa: Một hệ sinh độc lập tuyếntính trong không gian

3.4.2 Cơ sở:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

35/70

(f) độc lập tuyếntính.

0 1 1









1 0 1

=−2=0 nên hệ vectơ





một hệ sinh của R3. Hơn nữa, do





1 1 0









Thật vậy,theo ví dụ 2 mục 3.4.1 ta đã chứng minh hệ vectơ (f) là

một cơ sở của không gian R3.

1

2

3

Hệ vectơ (f)=

f

=(1,1,0); f

=(1,0,1);f

=(0,1,1)

cũng là





Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

36/70

2

hệ sinh của P

.

Tasẽ chỉ ra rằng hệ vectơ {p

,p

1

2

,p

} độc lập tuyếntính và là một

3

2

cũng là một cơ sở của P

.

3

:=p

(x)=x

−2x −3

3

p

2

2

:=p

(x)=x

+x +1

2

p

2

1

:=p

(x)=x

−1

1

p

2

Hệ các vectơ sau

vectơ {1,x,x2,...,xn}.

n

Tổngquát: Cơ sở chính tắc của không gian vectơ P

là hệ n+1

2

hơn hoặc bằng 2, hệ vectơ {1,x,x2} là một cơ sở của P

.

2

Ví dụ 2: Trongkhông gian vectơ P

gồm các đa thức có bậc bé

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

37/70

−1 1 −3









2

,p

}độclập tuyếntính.

3

=2=0 nênhệvectơ{p

,p

1

Vì

0 1 −2









1

1

1









1

2

3

−α

+α

−3α

=0





2

3

⇔

α

−2α

=0

(4)

1

2

⇔(α

+α

+α

1

(x2 +x +1)+α

−2α

)x −α

(x2 −2x −3)=0

+α

−3α

2

3

)x2 +(α

=0

3

2

3

1

2

3





α

+α

+α

=0

1

2

3



Pt này⇔α

(x2 −1)+α

2

1

1

2

2

3

3

P

Xét phương trình α

p

+α

p

+α

p

=O

.

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

38/70

2

sinh của P

.

thị tuyếntính qua hệ {p

,p

1

2

,p

}. Do đó hệ {p

3

1

,p

,p

2

3

} là một hệ

1

3

2

,α

,α

), tức là với mọi p ∈P

thì p luôn biểu

2

nghiệm duy nhất (α

−1 1 −3









Vì

0 1 −2

=2=0 nên hệ đang xét là hệ Cramer → hệ có









1

1

1









1

2

3

−α

+α

−3α

=c





2

3

⇔

α

−2α

=b

có nghiệm



1

2

3



α

+α

+α

=a



1

2

3

2

1

2

3

−2α

)x −α

+α

−3α

=ax2 +bx+c

3

⇔(α

+α

+α

)x2 +(α

1

2

(x2 +x +1)+α

(x2 −2x −3)

3

⇔ax2 +bx+c =α

(x2 −1)+α

tính qua {p

,p

1

2

,p

} ⇔∃α

3

1

,α

,α

2

3

∈R: p =α

1

p

1

+α

2

p

2

+α

3

p

3

.

2

Lấytùy ý p ∈P

. Giả sử p =ax2 +bx+c. Khi đó p biểu thị tuyến

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

39/70

có thể chọn ra một cơ sở.

V

Định lý 2: Từ một hệ sinh của một không gian vectơ khác {O

} ta

bất kỳ đều có thể bổ sung thành một cơ sở.

Hệ quả: Trongkhông gian vectơ, mỗi hệ vectơ độc lập tuyếntính

sở.

V

Định lý 1: Mọi không gian vectơ V trên K khác {O

} đều có cơ

gian vectơ thì bằng nhau.

Hệ quả: Số vectơ trong hai cơ sở khác nhau của cùng một không

vectơ của mọi hệ vectơ độc lập tuyếntính của V không vượt quá m.

Bổ đề: Nếu không gian vectơ V có một hệ sinh gồm m vectơ thì số

b. Sự tồn tại của một cơ sở:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

40/70

3a−b

3

−1

∀v =

b

∈W, ta có: v =a·

0

+b·

1













a

1

0

3×1













M

(R) theo định nghĩa.

Giải: Dễ dàng chứng minh được W là không gian con của

chỉ ra một cơ sở của W.

3×1

Chứng minh rằng W là một không gian con của M

(R) và hãy

3a−b

W =

b

, a,b ∈R

.





n

a

o





3×1

Ví dụ 3: Trongkhông gian vectơ M

(R) trên R, cho tập

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

41/70

3

−1

Vậy

0

,

1

là một cơ sở của W.









n

1

0

o







1



2

3α

−α

0

2

1

2

3

Pt này⇔

α

=

0

⇔α

=α

=α

=0.









1

α

0









3×1

1

1

2

2

M

(R)

Xét phương trình α

v

+α

v

=O

.

của W. Tasẽ chứng minh hệ vectơ nàyđộc lập tuyếntính.

3

−1

1

2

2

thì hệ vectơ {v

,v

} là một hệ sinh

1

Đặt

0

=v

,

1

=v









1

0









Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

42/70

T của tập S mà T là cơ sở của W.

3

4

5

v

=(1,4,−1,5),v

=(1,0,4,−1), v

=(2,5,0,2). Hãytìm tập con

vectơ S ={v

,v

1

2

,v

,v

3

4

,v

} với v

5

1

=(1,1,2,−1), v

2

=(1,2,1,1),

Ví dụ 4: Cho W là một không gian con của R4 được sinh bởi hệ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

43/70

dimK[x]=∞, dimC[a,b]=∞.

n

Ví dụ 1: dimRn =n, dimP

=n+1,

tức là hệ vectơ cơ sở của V có vô hạn phần tử (dimV =∞).

V gọi là không gian vô hạn chiều, nếu nó không hữu hạn chiều,

gian hữu hạn chiều.

có cơ sở. Các không gian n chiều được gọi chung là các không

V

Không gian {O

} được xem là có số chiều bằng 0 vì nó không

kí hiệu dimV =n.

của V có số phần tử bằng n. Tacũng nói số chiều của V là n và

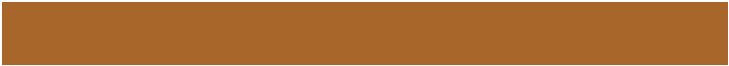
Tanói V là một không gian n chiều (n≥1) nếu hệ vectơ cơ sở

a. Định nghĩa: Cho V là một không gian vectơ trên K.

3.4.3 Số chiều của không gian vectơ:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

44/70

là một cơ sở của M

(R).

2

1 1

1 0

0 0

0 0

A=

, B =

, C =

, D =

1 1

1 1

1 1

1 0

















Ví dụ 3: Chứng minh rằng hệ vectơ

A,B,C,D

với





vectơ độc lập tuyếntính gồm n vectơ đều là cơ sở.

b. Định lý 1: Trongmột không gian vectơ n chiều trên K mọi hệ

0 0

0 0

1 0

0 1

1

2

3

4

e

=

, e

=

, e

=

, e

=

.

1 0

0 1

0 0

0 0

n

o

















Ví dụ 2: dimM

(R)=4 vì M

2

2

(R) có một cơ sở là:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

45/70

Do đó, S độc lập tuyếntính.

4

=α

=0

0 0

0 0

=

1 0

0 0







Xét phương trình α

A+α

B +α

C +α

D =O

1

2

3

4

M

(R

2















1 1

1 1

1 1

Pt này⇔α

+α

+α

+α

1

2

3

4

1 1

1 0

0 0





α

+α

+α

+α

=0



1

2

3

4





α

+α

+α

=0

1

2

3

⇔

⇔α

=α

=α

1

2

3



α

+α

=0

1

2







α

=0

1

nên ta chỉ còn phải chứng minh hệ S độc lập tuyếntính.

bằng với dimM

(R)=4

2

Giải: Vì số vectơ của hệ S =

A,B,C,D





Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

46/70

dim(U +W)=dimU +dimW −dim(U ∩W).

vectơ trên K. Khi đó

Định lý 3: Cho U và W là hai không gian con của không gian

dimW = dimV khi và chỉ khi W =V.

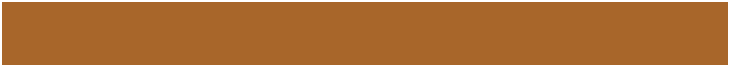
dimW ⩽ dimV.

V trên K. Khi đó

Định lý 2: Giả sử W là một không gian con của không gian vectơ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

47/70

bằng bao nhiêu?

b. Nếu dimV =6, dimU = dimW =4 thì dim(U ∩W) có thể

nhiêu?

a. Nếu dimV =3, dimU = dimW =2 thì dim(U ∩W) bằng bao

gian vectơ V.

Ví dụ 4: Giả sử U,W là hai không gian con thực sự của không

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

48/70

n

α

···

1

n





,α

,...,α

) hoặc [x]/(e )=

.

2

Kí hiệu x/(e)=(α



2



α





1

α

1

n





,α

,...,α

) được gọi là tọa độ của x đối với cơ sở (e).

2

Bộ số (α

1

1

2

2

n

n

x =α

e

+α

e

+...+α

e

.

1

n

i

,α

,...,α

), α

∈R,i =1,n sao cho

2

bộ số (α

1

n

,e

,...,e

và x ∈V. Khi đó tồn tại duy nhất một

2

cơ sở (e )=

e





b. Định nghĩa: Trongkhông gian vectơ n-chiều V trên K cho một

vectơ độc lập tuyếntính là duy nhất.

a. Định lý: Cách biểu thị tuyếntính của một vectơ qua một hệ các

3.4.4 Tọađộ của một vectơ:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

49/70

c. Tìm tọa độ của y =(1,2,3) đối với cơ sở (u).

b. Cho x =(6,9,14). Tìm tọa độ của x đối với cơ sở (u).

a. Chứng minh rằng (u) là 1 cơ sở của R3.

(u)=(u

,u

1

2

,u

) với u

3

1

=(1,1,1); u

2

=(1,1,2); u

3

=(1,2,3).

Ví dụ 1: Trongkhông gian vectơ R3 trên R cho hệ vectơ

đến cơ sở thì ta hiểu đó là tọa độ của nó đối với cơ sở chính tắc.

Do đó, sau nàykhi nói đến tọa độ của một vectơ mà không đề cập gì

Chú ý 1: Tọađộ của một vectơ đối với cơ sở chính tắc là chính nó.

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

50/70

Giải:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

51/70

Giải:

2

gian vectơ P

. Tìm tọa độ của p(x)=3x2 +x +1 đối với cơ sở (p).

2

(x)=x2 +x +1, p

(x)=x2 −2x −3 là một cơ sở của không

3

p

Ví dụ 2: Cho (p)={p

,p

1

2

,p

} với p

3

1

(x)=x2 −1,

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

52/70

b. Tìm ma trận chuyểncơ sở từ (e′) sang (e).

a. Tìm ma trận chuyểncơ sở từ (e) sang (e′).

1

2

3

(e

)={e

=(1,1,0),e

=(0,1,1),e

=(1,0,1)}.

′

′

′

′

1

2

3

(e)={e

=(1,0,0),e

=(0,1,0),e

=(0,0,1)}

Ví dụ 3: Trongkhông gian vectơ R3 trên R cho hai cơ sở sau:

trình: BP =B′.

B′. Khi đó P là ma trận không suy biến và là nghiệm của phương

của không gian vectơ Rn. Gọi P là ma trận chuyểncơ sở từ B sang

Chú ý: Gọi B,B′ lần lượt là ma trận cột các vectơ cơ sở (e) và (e′)

j

n với cột thứ j là tọa độ của vectơ e′

đối với cơ sở (e).

V. Ma trận chuyểncơ sở từ (e) sang (e′) là một ma trận vuông cấp

n

trên K, (e)={e

,e

1

2

,...,e

n

} và (e′)={e′

,e′

,...,e′

} là hai cơ sở của

1

2

c. Ma trận chuyểncơ sở: Cho V là một không gian vectorn chiều

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

53/70

Cho x =(−5,0,1). Tìm tọa độ của x đối với cơ sở (e′).

1

2

3

(e

)={e

=(1,1,0),e

=(0,1,1),e

=(1,0,1)}.

′

′

′

′

1

2

3

(e)={e

=(1,0,0),e

=(0,1,0),e

=(0,0,1)}

Ví dụ 4: Xét không gian vectơ R3 trên R với hai cơ sở

trong đó P là ma trận chuyểncơ sở từ (e) sang (e′).

x/(e)=P ·x/(e

)

′

,...,α′

)T. Khi đó

n

x/(e′)=(α′

,α′

1

2

trên K, (e)={e

,e

,...,e

} và (e′)={e′

,e′

,...,e′

} là hai cơ sở của

)T và

1

2

n

1

2

n

V và x ∈V. Giả sử x/(e)=(α

,α

,...,α

1

2

n

đối với hai cơ sở khác nhau): Cho V là một không gian vectơ n chiều

d. Công thức đổi tọa độ (Liên hệ giữa các tọa độ của một vectơ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

54/70

c. Tìm tọa độ của f(x)=2x3 −x +5 đối với cơ sở (p).

3

(e)={1,x,x2,x3} của P

sang cơ sở (p) này.

b. Tìm ma trận chuyểncơ sở từ cơ sở chính tắc

3

là một cơ sở của P

.

1

2

3

4

(p)={p

=1,p

=x −1,p

=(x −1)

,p

=(x −1)

}

2

3

a. Chứng minh rằng hệ

hơn hoặc bằng 3.

3

Ví dụ 5: Gọi P

là không gian vectơ gồm các đa thức có bậc nhỏ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

55/70

Khi đó hạng của hệ vectơ trên bằng hạng của ma trận sau:

n

1n

2n

mn

x

=(α

,α

,...,α

)









...

ij

,α

∈R,i =1,m,j =1,n.

2

12

22

m2

x

=(α

,α

,...,α

)







1

11

21

m1



x

=(α

,α

,...,α

)



sở nào đó của V là:

bất kỳ {x

,x

1

2

,··· ,x

n

}. Giả sử tọa độ của n vectơ nàyđối với một cơ

Định lý Trongkhông gian vectơ m-chiều V trên K. Cho hệ vectơ

3.5.2 Cách tìm hạng của một họ vectơ:

từ hệ đó.

gian vectơ V là số tối đa các vectơ độc lập tuyếntính có thể rút ra

3.5.1 Định nghĩa: Hạng của hệ vectơ {x

,x

1

2

,··· ,x

n

} của không

3.5. Hạng của một hệ vectơ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

56/70

Mọi hệ gồm r vectơ độc lập tuyếntính rút từ S là một cơ sở của W.

S ={x

,x

1

2

,...,x

n

} của không gian vectơ V bằng hạng r của S.

Định lý: Số chiều của không gian con W sinh bởi một hệ vectơ

3.5.3 Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi một hệ vectơ:

1

2

3

với x

=(1,1,1,1), x

=(1,2,3,4), x

=(2,3,2,3).

Ví dụ 1: Tìm hạng của hệ vectơ {x

,x

1

2

,x

3

} trong không gian R4

Chú ý: r(AT)=r(A).

(cột thứ j tương ứng với tọa độ của vectơ x

, j =1,n).

j

m1

m2

mn

α

α

··· α

··· ··· ··· ···





A=



21

22

2n



α

α

··· α





11

12

1n

α

α

··· α





Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

57/70

cơ sở cho W.

dụ 4 của mục 3.4.2 b. Sử dụng hạng của ma trận, hãyxâydựng một

Ví dụ 2: Cho W là một không gian con của R4 được cho trong ví

vectơ n chiều ta chứng minh hạng của hệ đó bằng n.

Để chứng minh một hệ n vectơ là một cơ sở của không gian

sinh ra V, tức là V = Span(S) thì S là cơ sở của V.

Nếu V là không gian vectơ n chiều và hệ S gồm n vectơ của V

một cơ sở của W.

Bước 2: Tậptất cả các dòng khác không có trong B tạo nên

đưa AT về ma trận bậc thang B.

j

tọa độ của vectơ x

. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Bước 1: Lập ma trận A cỡ m×n, trong đó cột thứ j của A là

{x

,x

1

2

,...,x

n

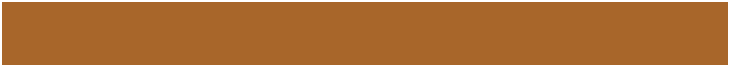
} của không gian vectơ Rm, ta thực hiện như sau:

Muốn tìm một cơ sở của không gian con W sinh bởi hệ vectơ

Nhận xét:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

58/70

1

2

m

m

[u

]/B +...+c

[u

]/B

2

[u

]/B +c

1

c

1

1

2

2

m

m

[c

u

+c

u

+...+c

u

]/B =

B ={v

,v

1

2

,...,v

m

} là một cơ sở của V. Khi đó,

Mở rộng: Cho V là một không gian vectơ trên R và

[cu]/B =c[u]/B.

[u+v]/B =[u]/B +[v]/B

trong V và c là một số thực thì

B ={v

,v

1

2

,...,v

m

} là một cơ sở của V. Nếu u và v là các vectơ

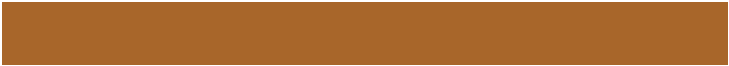
Bổ đề: Cho V là một không gian vectơ trên R và

các phần tử của Rn:

3.5.3. Sự đồng nhất các vectơ của không gian vectơ n chiều E với

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

59/70

Tìm [A+B]/(e) và 2[A]/(e).

−3

4

2

5

là một cơ sở của M

(R) và A=

, B =

.

2

2 −1

−3 1









0 0

0 0

1 0

0 1

11

12

21

22

E

=

, E

=

, E

=

, E

=

1 0

0 1

0 0

0 0

















Ví dụ 3: Trongkhông gian M

(R) trên R cho hệ vectơ





2

(e )=

E

,E

,E

,E

với

11

12

21

22

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

60/70

khi và chỉ khi T là một cơ sở của Rp.

và T ={[u

]/B,[u

1

2

]/B,...,[u

p

]/B}. Khi đó S là một cơ sở của V

B ={v

,v

1

2

,...,v

m

}. Cho S ={u

,u

1

2

,...,u

p

} là một tập con của V

Hệ quả: Giả sử V là một không gian vectơ trên R với cơ sở

lập tuyếntính trong Rp.

b. TậpS độc lập tuyếntính trong V khi và chỉ khi tập T độc

Span(T).

a. Vectơu ∈V thuộc Span(S) khi và chỉ khi [u]/B thuộc

và T ={[u

]/B,[u

1

2

]/B,...,[u

p

]/B}.

B ={v

,v

1

2

,...,v

m

}. Cho S ={u

,u

1

2

,...,u

p

} là một tập con của V

Định lý: Giả sử V là một không gian vectơ trên R với cơ sở

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

61/70

Kết luận {B

,B

1

2

,...,B

p

} là một cơ sở cho W = Span(S).

4

i

i

i

sao cho [B

]/E =u

.

i

Vớimỗi u

∈(u) ta tìm B

3

bước trong nhận xét trước của mục 3.5.3.

Tìm một cơ sở (u)={u

,u

1

2

,...,u

p

} cho Span(T) theo các

2

i

Để ý, [A

]/E ∈Rm, ∀i =1,n.

2

n

[A

]/E,[A

]/E,...,[A

]/E

.

1

T =

n

o

Tìm [A

]/E,i =1,n với E là một cơ sở nào đó của V . Đặt

i

1

m−chiều V =Rm:

gian con W sinh bởi hệ vectơ S ={A

,A

1

2

,...,A

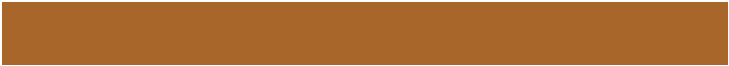
n

} của không gian

Nhận xét: Từ hệ quả ta suy ra các bước tìm một cơ sở cho không

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

62/70

Tìm một cơ sở cho Span(S).

1 −10

−2 6

3

4

A

=

, A

=

.

−1

0

3

7









−1 3

1

4

1

2

A

=

, A

=

,

1

2

0 −1









Ví dụ 4: Trongkhông gian M

(R) trên R cho tập





2

S =

A

,A

,A

,A

với

1

2

3

4

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

63/70

2

f(0)=0 và f(π

)=0).

1

2

V

(HD: Đặt f(x)=c

sinx +c

cosx và giả sử f(x)=O

. Khi đó

C[−π,π]. Chứng minh rằng tập này độc lập tuyếntính.

Bài tập 2: Tập{sinx,cosx} là tập con của không gian vectơ

2

3

1

tính được qua các vectơ x

,x

trong R3 với x

=(3,4,2);

=(6,8,7); x

=(3,4,5).

,x

1

x

2

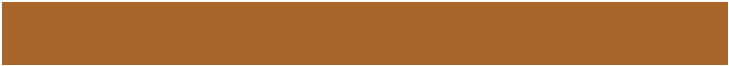
3

Bài tập 1: Tìm a (nếu có) để vectơ x =(9,12,a) biểu thị tuyến

Bài tập chương không gian vectơ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

64/70

4

Hỏi S có phải là một cơ sở của P

?

3

5

(x)=x4 +x +3, p

(x)=x4 +x3 −x +2 và p

(x)=x4 +x2.

4

p

1

2

trong đó p

(x)=x4 +3x3 +2x +4, p

(x)=x3 −x2 +5x +1,

4

2

4

,p

},

5

,p

,p

3

xét tập các vectơ S ={p

,p

1

Bài tập 4: TrongP

đó, h(0)=0,h′(0)=0,h

′′

(0)=0,h

′′′

(0)=0).

V

V

V

V

rằng h(x)=O

. Khi đó h′(x)=O

,h

′′

(x)=O

,h

′′′

(x)=O

. Do

1

2

3

4

trong V. (HD: Đặt h(x)=c

ex +c

e2x +c

e3x +c

e4x và giả sử

b. Chỉ ra rằng B ={ex,e2x,e3x,e4x} là hệ độc lập tuyếntính

a. Chứng tỏ rằng V là một không gian vectơ trên R.

V ={f(x):f(x)=ae

+be

+ce

+de

, với a,b,c,d ∈R}.

x

2x

3x

4x

Bài tập 3: Cho tập các hàm số

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

65/70

dimE. Hãychỉ ra một cơ sở của E.

Chứng minh rằng E là một không gian con của M

(R) và tính

2

3b c

E =

,a,b,c ∈R

a b

n

o





vuông cấp hai, cho tập

Bài tập 6: Trongkhông gian vectơ M

(R) trên R các ma trận

2

4

5

vectơ e

và e

đối với cơ sở đó.

của không gian con sinh bởi hệ các vectơ này.Tìm tọa độ của các

2

3

4

5

e

=(1,2,3), e

=(1,1,0), e

=(3,5,4), e

=(2,3,3). Tìm cơ sở

1

Bài tập 5: Trongkhông gian vectơ R3 cho các vectơ e

=(1,2,1),

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

66/70

1

2

3

Tìm tọa độ của u =3e

+4e

−6e

đối với cơ sở (e′).

1

2

3

(e

)={e

=(1,1,0),e

=(0,1,1),e

=(1,0,1)}.

′

′

′

′

sang cơ sở

1

2

3

(e)={e

=(1,2,3),e

=(2,−1,1),e

=(3,1,1)}

sở từ cơ sở

Bài tập 7: Trongkhông gian vectơ R3 hãylập ma trận chuyểncơ

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

67/70

3 4

c. Tìm tọa độ của A=

đối với cơ sở (E).

1 2





sang (E).

b. Tìm ma trận chuyểncơ sở từ cơ sở chính tắc (e) của M

(R)

2

a. Chứng minh rằng (E) là cơ sở của M

(R) trên R. Tìm dimE.

2

0 1

0

1

1 1

0 1

1

2

3

4

E

=

, E

=

, E

=

, E

=

.

1 0

2 −1

0 1

1 1

n

o

















vuông cấp hai, cho tập (E) các vectơ sau:

Bài tập 8: Trongkhông gian vectơ M

(R) trên R các ma trận

2

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

68/70

b. Tìm các ma trận chuyểncơ sở cho các cơ sở trên.

b. Tìm số chiều của W.

a. Hãytìm 03 cơ sở khác nhau cho W.

=(2,5,−2).

4

1

2

span{u

} với u

=(1,1,2), u

=(2,4,0),

=(3,5,2),u

,u

,u

,u

1

2

3

u

3

4

Bài tập 9: Cho W là một không gian con của R3, W =

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

69/70

vềmatrậnbậcthangB.CáccộtkháckhôngtrongB làcơsởchoW.

uT

uT

] (các cột của A sinh ra W). Biến đổi A

3

4

Cách 3: Đặt A=[uT

uT

1

2

lại u

. Tậptất cả các u

i

i

nàytạo ra một cơ sở cho W.

x

u

1

1

+x

2

u

2

+x

3

u

3

+x

4

u

4

=O

. Nếu ẩn x

i

nào là ẩn chính thì ta giữ

R3

này.Để có được điều này,ta giải phương trình

{u

,u

1

2

,u

,u

3

4

} sinh ra W nên một cơ sở cho W là tập con của hệ

Cách 2: Bỏ bớt những vectơ không cần thiết trong hệ sinh của W . Vì

x

u

1

1

+x

2

u

2

+x

3

u

3

+x

4

u

4

=b có nghiệm (x

,x

1

2

,x

,x

3

4

).

vectơ tùy ý của R3 thì b ∈W khi và chỉ khi phương trình

Cách 1: Sử dụng đặc trưng đại số của W: Lấyb =(b

,b

1

2

,b

) là

3

Hướng dẫn giải bài tập 9a:

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.



Đại số tuyến tính

70/70

W ={(x

,x

1

2

,x

)∈R

x

3

1

+x

2

+x

3

=0,x

1

+2x

2

−x

3

=0}.

3





Bài tập 11: Tìm cơ sở cho không gian con

cho chúng.

Tìm hai cơ sở khác nhau cho Span(S) và tìm ma trận chuyểncơ sở

1 −3

2

0

3

4

A

=

, A

=

.

−1 −1

−2 2









−1 3

2 −1

1

2

A

=

, A

=

,

1

2

−2

1









Bài tập 10: Trongkhông gian M

(R) trên R cho tập





2

S =

A

,A

,A

,A

với

1

2

3

4

Chương 3. Không gian vectơ

Evaluation Warning : The document was created with Spire.PDF for java.

